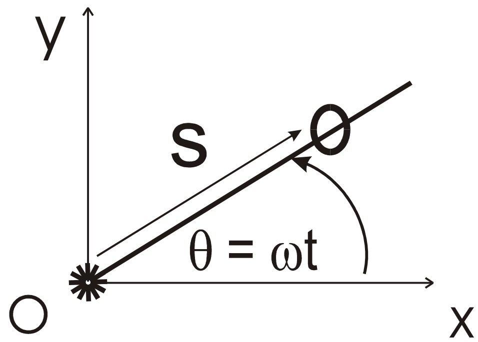
PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Velocità possibili e velocità virtuali

Ci poniamo il problema di determinare equazioni pure di moto, ovvero equazioni che non introducono incognite di reazioni. Consideriamo il seguente

Esempio 1 *Supponiamo di esaminare un punto P (anellino) scorrevole senza attrito su un asta che ruota con velocità angolare ω costante nel piano, attorno al suo estremo O*

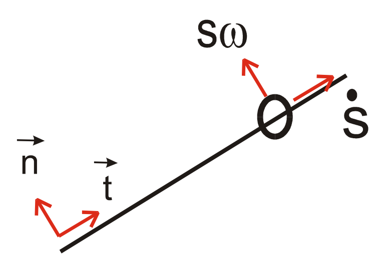


L'asta rappresenta per P un vincolo mobile descritto dalla funzione $f(s,t)$ Il sistema ha un solo grado di libertà. La posizione di P dipende dalla coordinata libera s e dal tempo t

$$\vec{P}(s,t) = s\cos\omega t\vec{i} + s\sin\omega t\vec{j}. \tag{1}$$

Ricaviamo la velocità derivando rispetto al tempo t l'espressione precedente.

$$\vec{v} = \dot{s}\cos\omega t\vec{i} + \dot{s}\sin\omega t\vec{j} - s\omega\sin\omega t\vec{i} + s\omega\cos\omega t\vec{j} = \dot{s}\vec{t} + s\omega\vec{n} \tag{2}$$



Osserviamo che la velocità di P ha una componente normale all'asta $s\omega$ che dipende esclusivamente dalla posizione di P, mentre la componente $\dot{s}$ ha una componente tangente al vincolo e può assumere qualunque valore. Le velocità possibili di P in una generica posizione s, hanno tutte la componente normale $s\omega$, mentre la componente tangente $\dot{s}$ è arbitraria. P è vincolato con vincolo liscio alla guida. La reazione vincolare Φ è normale al vincolo, e la sua potenza vale

$$\pi = \vec{\Phi} \times \vec{v} = \Phi s\omega \neq 0. \tag{3}$$

Se il vincolo ad un certo istante viene bloccato, il punto ha velocità solo tangente al vincolo $\omega = 0 \Longrightarrow \Phi s\omega = 0$

Definizione 1 *Si dice che P ha velocità virtuale v', se v è una velocità possibile e il vincolo viene pensato fisso. Nel nostro esempio*

$$\vec{v}' = \dot{s}\vec{t}. \tag{4}$$

La potenza della reazione vincolare (in assenza di attrito) è nulla per una velocità di P virtuale. Indico con $\tilde{\pi}$ la potenza corrispondente ad una velocità virtuale. Nel nostro esempio

$$\begin{cases} \pi\left(\Phi\right) \neq 0 \\ \tilde{\pi}\left(\Phi\right) = 0 \\ \vec{P}\left(s,t\right) = s\left(t\right)\cos\omega t\vec{i} + s\left(t\right)\sin\omega t\vec{j} \\ \vec{v} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{cases}. \tag{5}$$

Tutti i sistemi che hanno la proprietà di avere $\tilde{\pi}\left(\Phi\right) = 0$ si dicono non dissipativi. Consideriamo un sistema olonomo soggetto a vincoli dipendenti dal tempo. La posizione P_i $(i = 1, \ldots, N)$ del punto i-esimo nel generico istante t sarà funzione delle coordinate libere e del tempo

$$P_i = P_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_k | t\right). \tag{6}$$

Nel caso di vincoli fissi

$$P_i = P_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_k\right). \tag{7}$$

Consideriamo uno spostamento infinitesimo

$$dP_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial t} dt \qquad \underset{\text{velocità}}{\Longrightarrow} \qquad \vec{v}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial t}. \tag{8}$$

$\vec{v}_i$ è l'espressione analitica della velocità possibile di un punto P_i del sistema. Fissando i vincoli ad un certo istante, l'espressione analitica della velocità virtuale è

$$\vec{v}_i' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \frac{\delta q_k}{\delta t}. \tag{9}$$

La quantità

$$\frac{\delta q_k}{\delta t} \tag{10}$$

NON è la derivata di q_k rispetto al tempo t, ma è una quantità arbitraria che rappresenta la variazione possibile della coordinata pensando i vincoli fissati ad un certo istante, in un intervallo di tempo qualsiasi. Lo spostamento *virtuale* associato a $\vec{v}_i'$ è

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \tag{11}$$

Scriviamo l'equazione fondamentale della dinamica per un punto P_i appartenente ad un sistema non dissipativo.

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i \qquad i = 1, \ldots, N., \tag{12}$$

dove $\vec{F}_i$ è il risultante delle forze esterne e $\vec{\Phi}_i$ è il risultante delle reazioni vincolari esterne. Moltiplichiamo scalarmente per la velocità virtuale del punto i-esmo $\vec{v}_i'$

$$m_i \vec{a}_i \times \vec{v}_i' = \vec{F}_i \times \vec{v}_i' + \vec{\Phi}_i \times \vec{v}_i'. \tag{13}$$

Sommando su tutti i punti, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \times \vec{v}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \times \vec{v}_i'. \tag{14}$$

Se i vincoli sono perfetti (sistema non dissipativo)

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \times \vec{v}_i' = 0. \tag{15}$$

Il sistema 14 si può riscrivere come

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i \right) \times \vec{v}_i' = 0\,, \qquad \forall \vec{v}_i'.}_{\text{Equazione simbolica della dinamica}} \tag{16}$$

Se il sistema è **olonomo** vale l'espressione 9 e l'equazione 16 diventa

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \times \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \frac{\delta q_k}{\delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \frac{\delta q_k}{\delta t}. \tag{17}$$

Scambiamo l'ordine di sommazione

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \times \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \right) \frac{\delta q_k}{\delta t} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \right) \frac{\delta q_k}{\delta t}; \qquad \forall \frac{\delta q_k}{\delta t}. \tag{18}$$

Se moltiplichiamo ambo i membri per δt

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \times \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k. \tag{19}$$

Osservazione 1 *Se cerco le condizioni di equilibrio del sistema, le accelerazioni $\vec{a}_i$ si annullano.*

Principio dei Lavori Virtuali

Nel caso statico, l'equazione 19 diventa

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0 \qquad \forall \delta q_k, \tag{20}$$

oppure usando l'espressione degli spostamenti virtuali 11

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \delta \vec{P}_i = \delta^* L = 0. \tag{21}$$

La quantità $\delta^* L$ rappresenta il lavoro virtuale delle forze attive.

Condizione Necessaria e Sufficiente 1 *per l'equilibrio di un sistema è che il lavoro virtuale delle forze attive sia nullo, per ogni spostamento virtuale*

Principio 1 (dei lavori virtuali) *Condizione Necessaria e Sufficiente per l'equilibrio di un sistema soggetto a vincoli bilateri e perfetti è che il lavoro virtuale delle forze attive sia nullo per ogni spostamento virtuale.*

Se il sistema è olonomo

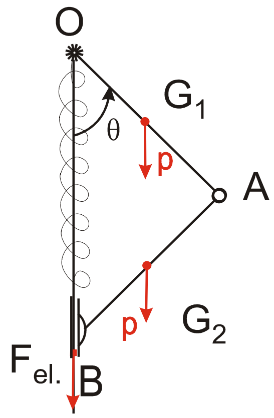
$$\delta^* L = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k = 0 \qquad \forall \delta q_k. \tag{22}$$

Questo implica che $Q_k = 0$ con $k = 1, \ldots, n$. Le Q_k rappresentano le componenti della sollecitazione attiva secondo la coordinata q_k. Il sistema

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_k} \tag{23}$$

è formato da n equazioni in n incognite.

Esempio 2 *Si consideri il sistema di figura*



formato da 2 aste omogenee di lunghezza l e peso p, incernierate in O e in A. L'asta AB reca al suo estremo un carrello connesso in O da una molla di costante elastica k. Calcolare le posizioni di equilibrio. Iniziamo a identificare le forze attive: il peso p delle 2 aste e la forza elastica della molla. Il sistema ha un g.d.l. identificato dall'angolo θ. Scegliamo come sistema di riferimento, il sistema centrato in O avente come direzione verticale la direzione della retta che passa per il segmento OB e verso discendente. Le posizioni dei due baricentri e del punto B connesso con la molla sono espresse da

$$\begin{cases} G_1 = (x_{G_1}, y_{G_1}) = \left(\frac{l}{2}\sin\theta, \frac{l}{2}\cos\theta\right) \\ G_2 = (x_{G_2}, y_{G_2}) = \left(\frac{l}{2}\sin\theta, 3\frac{l}{2}\cos\theta\right) \\ B = (x_B, y_B) = (0, 2l\cos\theta) \end{cases} . \tag{24}$$

Gli spostamenti virtuali compatibili con i vincoli sono

$$\begin{cases} \delta G_1 = (\delta x_{G_1}, \delta y_{G_1}) = \left(\frac{l}{2}\cos\theta\delta\theta, -\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta\right) \\ \delta G_2 = (\delta x_{G_2}, \delta y_{G_2}) = \left(\frac{l}{2}\cos\theta\delta\theta, -3\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta\right) \\ \delta B = (\delta x_B, \delta y_B) = (0, -2l\sin\theta\delta\theta) \end{cases} , \tag{25}$$

mentre le forze, riferite agli assi, si possono scrivere come

$$\vec{p} = p\vec{j} \qquad e \qquad \vec{F}_{el.} = -k2l\cos\theta\vec{j} \tag{26}$$

Scriviamo il P.L.V.

$$\delta^* L = \vec{p} \times \overrightarrow{\delta G_1} + \vec{p} \times \overrightarrow{\delta G_2} + \vec{F}_{el.} \times \overrightarrow{\delta C} = 0. \tag{27}$$

Sviluppando i prodotti, si ottiene

$$\delta^* L = -p\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta - p3\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta + k4l^2\cos\theta\sin\theta\delta\theta$$

$$= \left(-2pl\sin\theta + k4l^2\cos\theta\sin\theta\right)\delta\theta = Q_\theta\delta\theta = 0 \qquad \forall\delta\theta \ \textit{arbitrario}. \tag{28}$$

Il coefficiente Q_θ dello spostamento $\delta\theta$ è la componente delle sollecitazioni attive secondo la coordinata θ. C.N.S per l'equilibrio è che $Q_\theta = 0$

$$\Longrightarrow \qquad -2pl\sin\theta + k4l^2\cos\theta\sin\theta = 2l\left(-p + 2kl\cos\theta\right)\sin\theta = 0. \tag{29}$$

Questo vuol dire che le posizioni di equilibrio si trovano per

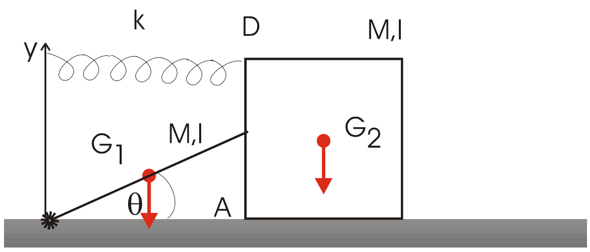
$$\sin\theta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = 0, \pi \tag{30}$$

oppure per

$$-p + 2kl\cos\theta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\theta = \frac{p}{2kl} \tag{31}$$

con la condizione che $p \leq 2kl$.

1. **Esempio 3** *Il sistema in figura è formato da una lamina piana di lato l e massa M e da un'asta incernierata di lunghezza l e massa M. L'asta è appoggiata in un punto del lato AD della lamina e nel punto D viene applicata una molla di costante k. Si determini il valore di k affinché l'asta, in posizione di equilibrio, formi un angolo di $\pi/6$ con l'orizzontale.*



Le forze attive sono: la forza peso p e la forza elastica. Le posizioni dei due baricentri e del punto B connesso con la molla sono espresse da

$$\begin{cases} G_1 = (x_{G_1}, y_{G_1}) = \left(\frac{l}{2}\cos\theta, \frac{l}{2}\sin\theta\right) \\ G_2 = (x_{G_2}, y_{G_2}) = \left(\frac{l}{2} + l\cos\theta, \frac{l}{2}\right) \\ D = (x_D, y_D) = (l\cos\theta, 0) \end{cases} . \tag{32}$$

Gli spostamenti virtuali compatibili con i vincoli sono

$$\begin{cases} \delta G_1 = (\delta x_{G_1}, \delta y_{G_1}) = \left(-\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta, \frac{l}{2}\cos\theta\delta\theta\right) \\ \delta G_2 = (\delta x_{G_2}, \delta y_{G_2}) = \left(-\frac{l}{2}\sin\theta\delta\theta, 0\right) \\ \delta D = (\delta x_B, \delta y_B) = (-l\sin\theta\delta\theta, 0) \end{cases} , \tag{33}$$

mentre le forze, riferite agli assi, si possono scrivere come

$$\vec{p} = -p\vec{j} \qquad e \qquad \vec{F}_{el.} = -kl\cos\theta\vec{i}. \tag{34}$$

Scriviamo il P.L.V.

$$\delta^* L = \vec{p} \times \overrightarrow{\delta G_1} + \vec{p} \times \overrightarrow{\delta G_2} + \vec{F}_{el.} \times \overrightarrow{\delta D} = 0. \tag{35}$$

Sviluppando i prodotti, si ottiene

$$\delta^* L = -p\frac{l}{2}\cos\theta\delta\theta + kl^2\cos\theta\sin\theta\delta\theta$$

$$= \left(-\frac{pl}{2}\cos\theta + kl^2\cos\theta\sin\theta\right)\delta\theta = Q_\theta\delta\theta = 0 \qquad \forall\delta\theta \text{ } arbitrario. \tag{36}$$

Per l'equilibrio

$$Q_\theta = -\frac{pl}{2}\cos\theta + kl^2\cos\theta\sin\theta = 0. \tag{37}$$

Imponiamo l'angolo di equilibrio $\theta = \pi/6$

$$Q_\theta = -pl\frac{\sqrt{3}}{4} + kl^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{p}{l} \tag{38}$$