CAPITOLO 5

TEORIA DELLA SIMILITUDINE

5.1. Introduzione

La Teoria della Similitudine ha principalmente due utilizzi:

- Estendere i risultati ottenuti testando una singola macchina ad altre condizioni operative o a una famiglia intera di macchine che, in entrambi i casi, soddisfino ben precisi criteri
- Individuare, per ogni applicazione, la geometria della macchina che permetta di ottenere il massimo rendimento.

La Teoria della Similitudine asserisce che macchine che soddisfano la similitudine fluidodinamica hanno uguale rendimento. Affinché due macchine siano in similitudine devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

1. Similitudine geometrica: tutte le dimensioni devono essere in scala, in particolare diametri, altezze di pala, angoli, spessori.
2. Similitudine cinematica: stessi rapporti di velocità e quindi stessi triangoli di velocità.
3. Similitudine dinamica: stessi rapporti tra le forze, e quindi stesso numero di Reynolds.
4. Stesso numero di Mach (effetto della comprimibilità).

Se le quattro condizioni sono contemporaneamente verificate, allora le macchine si dicono ***Simili*** e hanno uguale rendimento.

Si ricorda che il numero di Reynolds è definito come:

$$\mathrm{Re} = \frac{rVL}{m} = \frac{VL}{n} = \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscose}} \tag{5.1}$$

dove L è una lunghezza caratteristica, V è la velocità del fluido, μ e ν sono rispettivamente la viscosità dinamica e cinematica.
Va osservato che la similitudine geometrica deve essere verificata su ogni scala. Questo comporta alcune limitazioni. In particolare, nel passaggio da macchine grandi a macchine piccole non sempre è possibile riprodurre in perfetta scala gli spessori (per limiti imposti dalle lavorazioni e dalla resistenza meccanica), i giochi (per i limiti imposti dalle dilatazioni) e la rugosità superficiale (per limiti imposti dalle lavorazioni). Conseguentemente, macchine piccole avranno un rendimento peggiore.
Altri limiti derivano dal fatto che, perché siano verificate contemporaneamente la similitudine cinematica e quella dinamica, i fluidi devono avere lo stesso comportamento termodinamico e volumetrico, e l'influenza del numero di Reynolds Re deve essere trascurabile. Il primo effetto risulta ininfluente se il fluido di lavoro è incomprimibile, mentre il secondo aspetto è verificato se il numero di Reynolds è maggiore di $5 \cdot 10^5$, cioè per moto turbolento completamente sviluppato.

5.2. Teorema P o di Buckingham

Vediamo più nel dettaglio la derivazione matematica di questa teoria, e gli strumenti che essa mette a disposizione per la risoluzione pratica di problemi di progettazione.
La Teoria della Similitudine si basa sul Teorema Π. Esso dice che, scelta una funzione obiettivo y_1, descritta da n variabili:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \tag{5.2}$$

il fenomeno così rappresentato può essere studiato tramite una funzione f_1^* espressa in termini a-dimensionali:

$$\Pi y_1 = f_1^*(p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, p_m) \tag{5.3}$$

dove il numero di parametri a-dimensionali m è pari a $n-q$, essendo q il numero di unità fondamentali (lunghezza L, tempo T, massa M e temperatura θ). Il Teorema Π permette quindi di ridurre il numero di variabili da controllare. Questo indipendentemente dalla forma matematica assunta dalle funzioni f_1 e f_1*. Per conoscere tali funzioni sarà poi necessario ricorrere alla sperimentazione.

5.2.1. Analisi dimensionale: Pompa

Applichiamo il Teorema Π al caso di una pompa (ρ = costante). Con riferimento alla figura 5.1, consideriamo la macchina come una scatola chiusa e andiamo a controllare ingresso (sezione 1) e uscita (sezione 2). In queste sezioni misuriamo pressione, velocità e densità, in modo tale da poter calcolare la portata volumetrica Q, la prevalenza gH e il rendimento η. Supponiamo inoltre di ripetere le misure a diverse velocità di rotazione n della macchina.
Innanzitutto, bisogna individuare le funzioni obiettivo. Nel caso della pompa, abbiamo visto come il suo funzionamento sia noto se si conoscono la prevalenza gH, il rendimento η e la potenza assorbita P. Bisogna quindi identificare le grandezze da cui queste tre variabili dipendono: si distingue tra:

- variabili geometriche: $\{L_i\}, D$, dove la prima è composta da una serie di parametri geometrici che permettono di eseguire la macchina in officina, mentre il secondo è il diametro esterno della girante.
- variabili del fluido: ρ, μ (viscosità); definiscono univocamente il fluido.
- variabili di controllo: n e Q; al loro variare definiscono univocamente tutti i parametri della macchina.

Il funzionamento della macchina è quindi descritto dalle seguenti relazioni:

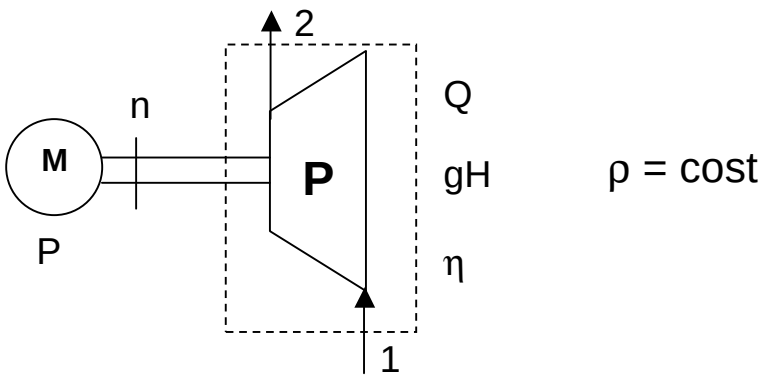

Figura 5.1.

$$
\begin{aligned}
gH &= f_1(n, Q, r, m, \{L_i\}, D) \\
h &= f_2(n, Q, r, m, \{L_i\}, D) \\
P &= f_3(n, Q, r, m, \{L_i\}, D)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

che, in forma compatta, diventano:

$$
\begin{pmatrix} gH \\ h \\ P \end{pmatrix} = f_{1,2,3}(n, Q, r, m, \{L_i\}, D) \tag{5.5}
$$

Si hanno quindi 7 variabili (di volta in volta 6 indipendenti e 1 obiettivo) e 3 unità fondamentali, avendo considerato un caso incomprimibile. Da un punto di vista grafico, il legame espresso dalla relazione (5.5) non è altro che la famiglia di curve di funzionamento della pompa, già ricavate nel Capitolo 4, che sono richiamate in figura 5.2.

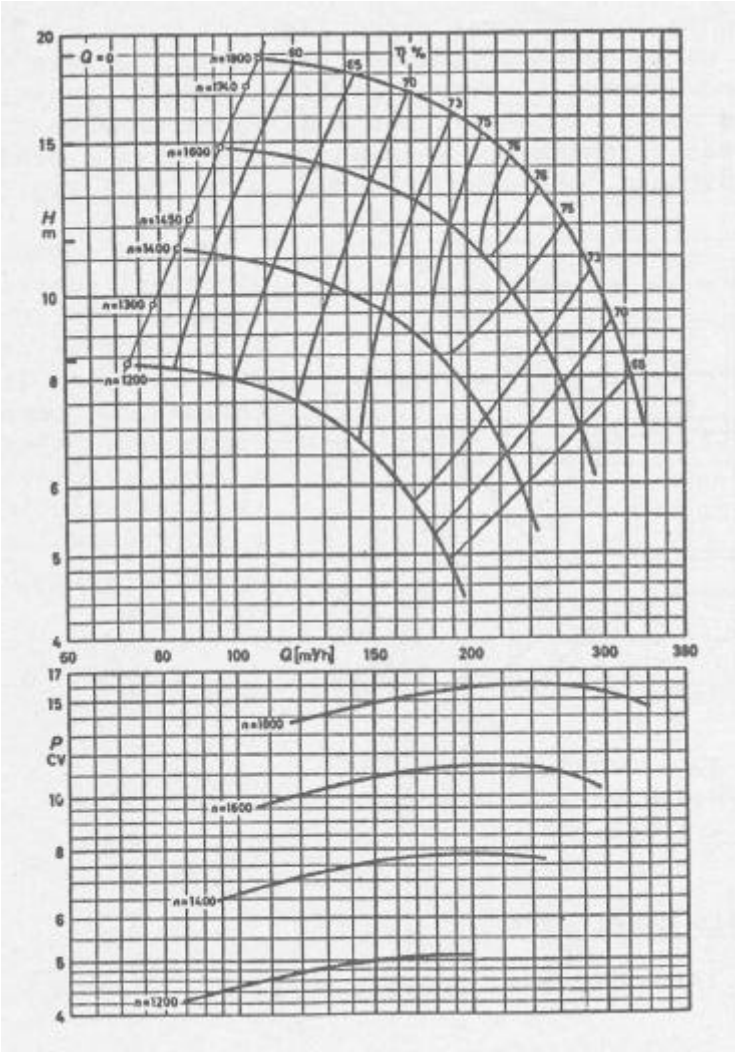

Figura 5.2. Curve caratteristiche di una pompa.

Il Teorema Π dice che è possibile ottenere tre nuove relazioni funzionali dipendenti da 4 parametri a-dimensionali. Al posto di utilizzare L, T, M scelgo una terna di grandezze indipendenti più appropriata:

- D (ha le dimensioni di una lunghezza [L]) al posto di L
- n (ha le dimensioni di [T^{-1}]) al posto di T

- ρ (ha le dimensioni di [ML^{-3}]) al posto di M

L'a-dimensionalizzazione dei vari termini porta ad introdurre i seguenti parametri:

- da gH [J/kg = m^2/s^2] → $\Psi = \dfrac{gH}{n^2 D^2}$ (5.6)
- da Q [$m^3/s = m^3/s$] → $\Phi = \dfrac{Q}{nD^3}$ (5.7)
- da P [W = kg m^2/s^3] → $\hat{P} = \dfrac{P}{rn^3 D^5}$ (5.8)
- da μ [kg/(ms)] → $\dfrac{1}{\mathrm{Re}} = \dfrac{m}{rnD^2}$ (5.9)
- da $\{L_i\}$ [m] → $\hat{L}_i = \dfrac{\{L_i\}}{D}$ (5.10)

dove n va espresso, a seconda della definizione prescelta, in cicli/sec o in rad/s. L'analisi dimensionale porta quindi alla seguente relazione:

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ h \\ \hat{P} \end{pmatrix} = f^*_{1,2,3}\left(\Phi, \mathrm{Re}, \hat{L}_i\right) \tag{5.11}$$

Per due macchine simili (cioè che soddisfano le quattro condizioni richieste dalla similitudine), oppure per la singola macchina (per due suoi punti di funzionamento in similitudine tra loro e che quindi presentano lo stesso rendimento), la relazione (5.11) diventa:

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ h \\ \hat{P} \end{pmatrix} = f^*_{1,2,3}\left(\Phi\right) \tag{5.12}$$

Se si applica quanto appena visto alla singola macchina, si vede che la famiglia di curve portata – prevalenza al variare del numero di giri, se trasformate in forma a-dimensionale tramite le relazioni (5.6) e (5.7), corrispondono ad un'unica curva in termini dei parametri ϕ e ψ (equazione (5.12)), così come esplicitato in figura 5.3. Tali parametri si chiamano rispettivamente coefficiente di portata e di prevalenza. Ogni punto appartenente a detta curva avrà un ben preciso rendimento, che quindi cambia lungo la curva. Sarà infine possibile individuare il punto di massimo rendimento.

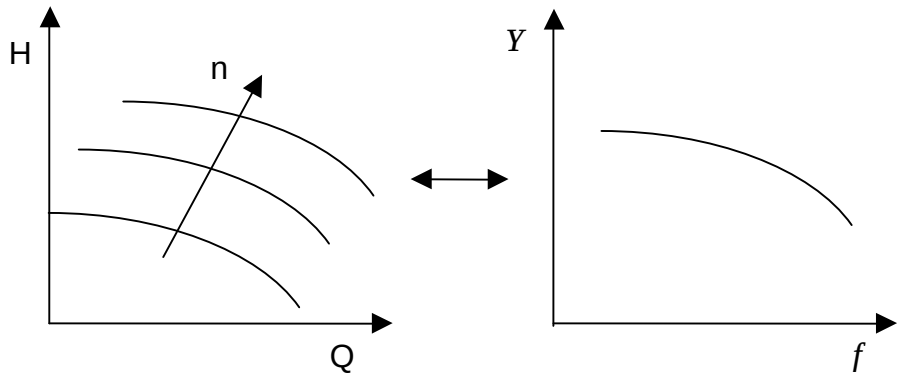

Figura 5.3. Curva caratteristica a-dimensionale di una pompa.

Nella realtà le variabili obiettivo sono solo due (gH e η), essendo possibile ricavare la potenza in funzione delle altre due. Per una pompa, la potenza reale assorbita all'albero della macchina vale:

$$P = \frac{rQgH}{h} \tag{5.13}$$

Sostituendo la (5.13) nell'espressione della $\hat{P}$ si ricava, dopo alcuni passaggi:

$$\hat{P} = \frac{QgH}{hD^5n^3} = \frac{1}{h}\frac{Q}{nD^3}\frac{gH}{n^2D^2} = \frac{1}{h}\Phi\Psi = \Phi\frac{f_1^*(\Phi)}{f_2^*(\Phi)} \tag{5.14}$$

Si ricorda che due macchine simili devono realizzare gli stessi triangoli di velocità, cioè gli stessi scambi energetici con il fluido. Ciò inoltre vuol dire avere uguale rendimento e quindi stessi valori di Φ e Ψ. Si sottolinea inoltre che detta Teoria non dice nulla su come queste funzioni siano fatte. La loro forma potrà essere ricavata attraverso la sperimentazione o la simulazione numerica.

5.3. Numero di giri specifico

Consideriamo ancora il caso della pompa. Si definisce ***Numero di Giri Specifico*** n_s il seguente parametro non-dimensionale:

$$n_s = \frac{(\Phi)^x}{(\Psi)^y} = \frac{Q^x}{n^xD^{3x}}\frac{n^{2y}D^{2y}}{(gH)^y} \tag{5.15}$$

Gli esponenti x ed y vengono scelti in maniera tale da eliminare la dipendenza esplicita dalla geometria, cioè da D. Con alcuni passaggi si ricava:

$$n_s = n\frac{\sqrt{Q}}{(gH)^{3/4}} \tag{5.16}$$

Nelle relazioni precedenti tutti i termini vanno espressi in unità di misura del sistema internazionale. Quindi n va espresso in [cicli/sec], Q in [m^3/sec], gH in [J/kg] e D in [m], essendo quest'ultimo il diametro esterno della girante, rappresentativo dell'ingombro della macchina.
In letteratura esistono diverse formulazioni del numero di giri specifico. Un'altra possibile definizione coinvolge, al posto del numero di giri, la velocità angolare ω:

$$w_s = w\frac{\sqrt{Q}}{(gH)^{3/4}} \tag{5.17}$$

Il processo di scelta della macchina ottima per una certa applicazione passa attraverso un procedimento di ottimizzazione in cui sono note da un lato le caratteristiche dell'impianto in cui la macchina va installata, e cioè portata e prevalenza, ed è necessario dall'altro scegliere il regime di rotazione, e cioè n e i parametri adimensionali (h/D, D_1/D_2, α, β essendo h l'altezza di pala, D_1 e D_2 i diametri all'ingresso e all'uscita della macchina, α e β gli angoli d'uscita delle palette dello statore e del rotore rispettivamente), per definire la macchina. Scegliere l'n_s lega impianto e macchina perché, associato ad ogni valore di n_s, si ha una famiglia di macchine a geometria ottimizzata (fissa i parametri geometrici in termini di rapporti adimensionali e gli angoli) cioè che, per quella applicazione, fornisce il massimo rendimento. Grazie alla Teoria della Similitudine, tutte le macchine (di diversa geometria e potenza) che avranno lo stesso n_s avranno anche lo stesso rendimento, che sarà il massimo possibile per quell'applicazione. Saranno poi anche altri tipi di considerazioni (economiche, di ingombri ecc.) che incideranno sulla scelta definitiva.
Operativamente parlando, il processo di scelta della macchina ottima può in pratica essere condotto in due modi distinti. Una prima possibilità consiste nell'utilizzare la Teoria della Similitudine inserita in un processo di ottimizzazione; note le caratteristiche dell'impianto, essa infatti fornisce un modello matematico che, attraverso algoritmi di ottimizzazione, permette di ottenere la geometria ottima, cioè quella combinazione dei parametri adimensionali (h/D, D_1/D_2, α, β) e del numero di giri per cui il rendimento è massimo.
Una seconda strada si basa sull'impiego di informazioni derivanti da altre macchine già costruite e testate. Nel passato infatti sono stati raccolti dati di origine sperimentale sul funzionamento di

numerose macchine. A partire da questi dati sono state costruite delle curve che forniscono i valori del rendimento ottimo in funzione del numero di giri specifico per le diverse tipologie di macchine. La Figura 5.4 riporta tali curve, relativamente al caso delle pompe. In questo grafico si distinguono tre zone: per bassi valori di ω_s si hanno le macchine lente cioè che elaborano basse portate ma forniscono alte prevalenze (pompe centrifughe). Per valori crescenti di ω_s si incontrano dapprima le macchine a flusso misto e quindi quelle assiali, che elaborano bassi salti ma grandi portate. Dalla figura si vede inoltre come, al variare del numero di giri specifico vari la geometria della macchina. Grafici analoghi esistono anche per le turbine idrauliche e per i compressori.

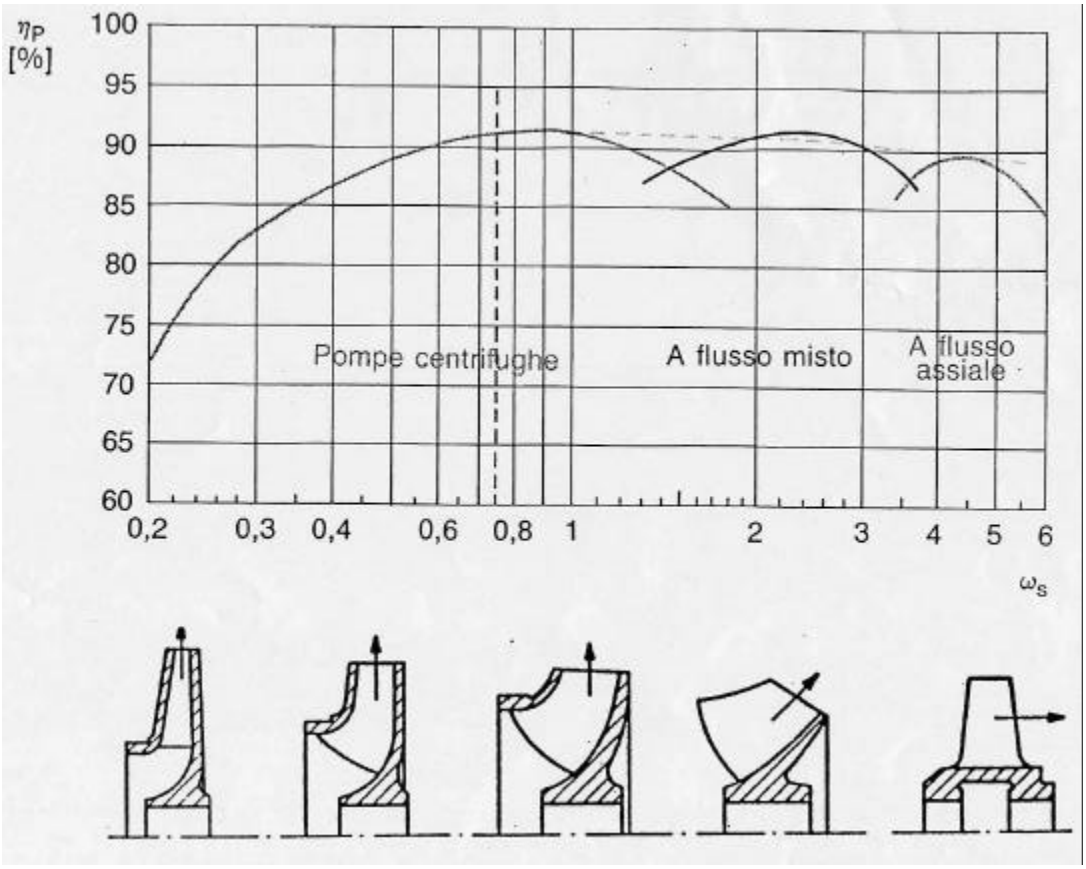

Figura 5.4 Rendimento in funzione di w_s per geometrie ottimizzate.

Il numero di giri specifico può essere usato, oltre che per la scelta della geometria ottima per una ben precisa applicazione, anche per determinare un legame tra punti di funzionamento diversi della singola macchina, ma tra loro simili. E' infatti possibile tracciare, ad esempio nel piano caratteristico della pompa, le curve a n_s costante, così come mostrato in figura 5.5. Dette curve sono delle parabole passanti per l'origine. Tutti i punti di funzionamento di una macchina, per quanto caratterizzati da diversi regimi di rotazione, che intersecano la curva a n_s costante, sono tra loro simili, e quindi presentano uguale rendimento.
E' allora possibile, nota la curva caratteristica ad un definito regime di rotazione n_1, determinare la curva caratteristica per un qualunque altro regime n. La curva di funzionamento della pompa, così come ricavata nel Capitolo precedente, ha la forma seguente:

$$gH_1 = A - BQ_1^2 \tag{5.18}$$

essendo le costanti A e B funzione della geometria della macchina e del regime di rotazione. La relazione precedente può facilmente essere riscritta in termini dei parametri a-dimensionali di portata Φ e prevalenza Ψ, utilizzando i valori noti al regime di rotazione n_1:

$$\frac{gH_1}{n_1^2 D^2} = \frac{A}{n_1^2 D^2} - \left(BD^4\right)\frac{Q_1^2}{n_1^2 D^6} \tag{5.19}$$

che, esplicitando i coefficienti di portata e prevalenza diventa:

$$\Psi = \frac{A}{n_1^2 D^2} - \left(BD^4\right)\Phi^2 \tag{5.20}$$

E' allora possibile ricavare la curva di funzionamento della macchina per il generico regime di rotazione, semplicemente ricordando che, per punti tra loro simili, i parametri a-dimensionali restano costanti:

$$\frac{gH_1}{n_1^2} = \frac{gH}{n^2} \tag{5.21}$$

$$\frac{Q_1^2}{n_1^2} = \frac{Q^2}{n^2} \tag{5.22}$$

che, sostituite nella (5.19), forniscono:

$$gH = A\frac{n^2}{n_1^2} - BQ^2 \tag{5.23}$$

Allo stesso risultato si poteva giungere considerando, al posto dei coefficienti di portata e prevalenza, il numero di giri specifico.

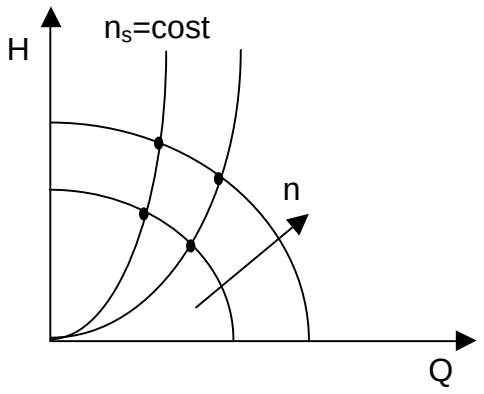

Figura 5.5 Curve a n_s costante nel piano H-Q di una pompa.

5.4. Limiti di validità

Si è detto come, nella realtà, la Teoria della Similitudine sia valida solo sotto ben determinate ipotesi, spesso difficilmente realizzabili. Per le macchine idrauliche, la similitudine cessa di essere valida alle alte velocità (Φ>0.06) perché l'insorgere della cavitazione fa si che la similitudine geometrica e dinamica non siano più verificate. Viceversa, a bassa velocità (Φ<0.02), l'influenza del numero di Reynolds può non essere trascurabile, e quindi la similitudine dinamica non è più verificata.

Per quanto invece riguarda i limiti di validità riguardanti la similitudine geometrica e, per le macchine termiche, l'influenza del numero di Mach (comprimibilità) e del numero di Reynolds, è possibile estendere il campo di validità dei risultati ottenuti in precedenza a patto di introdurre dei fattori correttivi.

Gli effetti di taglia vengono tenuti in considerazione introducendo il parametro di Taglia VHC (ha le dimensioni di una lunghezza) così definito:

$$VHC = \frac{\sqrt{Q_2}}{(gH)^{1/4}} \tag{5.24}$$

Per tenere conto degli effetti della comprimibilità, che si traduce da un lato in una variazione della densità del fluido e dall'altro in una variazione delle perdite conseguente alla variazione del numero di Mach, si introduce un nuovo parametro dato dal rapporto tra le portate volumetriche in uscita e ingresso alla macchina.

Gli effetti di Re vengono invece comunque trascurati. Ne risulta quindi una Teoria della Similitudine corretta, che tiene conto del fatto che la similitudine geometrica non sempre è verificata e che la comprimibilità del fluido può giocare un ruolo non trascurabile. Allora, perché due macchine possano essere considerate simili, dovranno avere lo stesso valore dei seguenti parametri:

$$n_s; \quad \frac{Q_2}{Q_1}; \quad VHC \text{ con Re>5 } 10^5$$

Si ricorda che la prevalenza gH non è altro che il lavoro ideale scambiato tra fluido e macchina. Nel caso di macchina termica, cioè operante con fluido comprimibile, in tutte le espressioni precedenti al posto della prevalenza va sostituito il salto entalpico isentropico a cavallo della macchina:

$$n_s = n\frac{\sqrt{Q}}{(\Delta h_{is})^{3/4}} \tag{5.25}$$

$$VHC = \frac{\sqrt{Q_2}}{(\Delta h_{is})^{1/4}} \tag{5.26}$$

Nel calcolo del numero di giri caratteristico tramite la (5.25) infine, la portata volumetrica Q va calcolata in ingresso alla macchina, se questa è operatrice (compressore), e in uscita se invece è una macchina motrice (turbina).