Università di Bergamo
Facoltà di Ingegneria

Intelligenza Artificiale

Paolo Salvaneschi

A7_4 V1.3

Logica del primo ordine

Nota: è utilizzato in parte il materiale didattico associato al testo di Stuart J. Russell, Peter Norvig

INDICE

- Limiti della logica proposizionale
- Logica del primo ordine
- Modelli e interpretazioni
- Sintassi e semantica

Limiti della logica proposizionale

- Elementi positivi della logica proposizionale
  - Dichiarativa

    Nei linguaggi procedurali ogni aggiornamento delle strutture di dati (fatti) è eseguito attraverso una specifica procedura applicativa (conoscenza di dominio compilata)

    Da una KB scritta con la logica si possono derivare nuovi fatti con un motore di inferenza indipendente dal dominio

Limiti della logica proposizionale

– Permette il trattamento di informazione parziale (disgiuntiva, negata)

Le strutture dati di un programma procedurale memorizzano un valore per una variabile

Non trattano fatti del tipo “Il sensore è guasto o è disattivato”, “il braccio meccanico non è nella posizione 12”

Limiti della logica proposizionale

- E’ composizionale

  (il significato di $A \wedge B$ è derivato dal significato di A e B)

  Il linguaggio naturale non é composizionale

  “Allora, se il caso, ci vediamo Lunedì”. Il significato non è la composizione dei significati delle parti ma dipende dal contesto precedente

- E’ indipendente dal contesto (non ambigua)

  A differenza del linguaggio naturale. “Dammi un colpo di telefono”, “Batti il chiodo con un colpo”

Limiti della logica proposizionale

- Limiti
  - Ha un potere espressivo limitato

    Es. non è possibile esprimere la frase: “Se la misura di spostamento da un sensore è elevata e la misura di spostamento dal sensore vicino è elevata la situazione è di allarme grave”

    A meno di scrivere una proposizione per ogni coppia di sensori vicini

    Non si può descrivere la frase in modo conciso

    Il numero delle regole può rendere inefficiente l’inferenza

- Logica del primo ordine (FOL)

- Aspetto ontologico (la natura della *realtà*)
  - Esistono fatti, oggetti e relazioni
- Aspetto epistemologico (gli stati della conoscenza)
  - L'agente crede un fatto falso o vero o non è in grado di decidere

Logica del primo ordine

- Oggetti (case, muri, pilastri, sensori di spostamento, misure, …..)
- Relazioni (Predicati)

  Proprietà e relazioni su insiemi di oggetti del dominio

  (gravemente danneggiato, parte di, affidabile, vicino a, installato su)

  – Relazioni unarie (proprietà degli oggetti)

  – Relazioni n-arie

- Relazioni (Predicati)

fratello di (x, y)

fratello di (Giovanni, Giuseppe)

fratello di (Pietro, Giuseppe)

Relazione binaria

è posto tra (x, y, z)

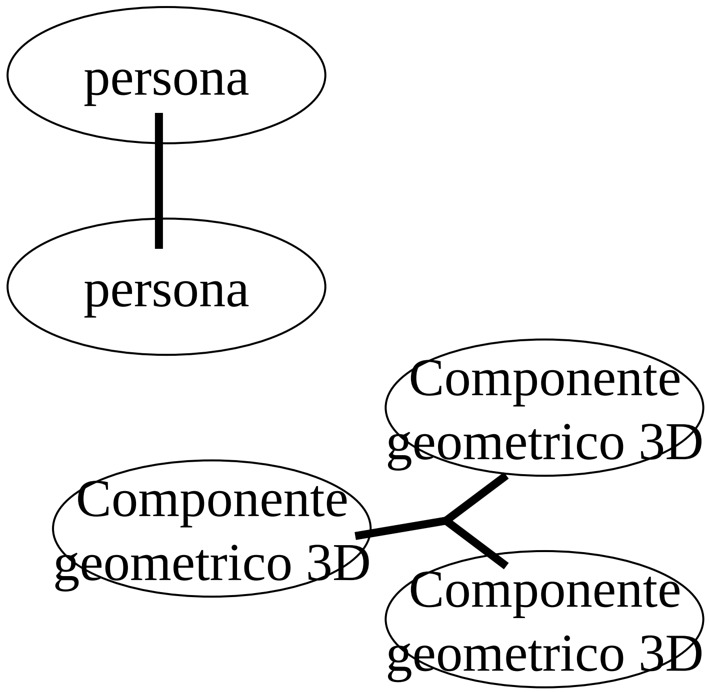
è posto tra (cubo, palla, cilindro)

Relazione ternaria

rosso (x)

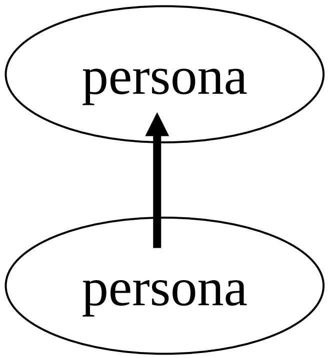
rosso (cubo)

Relazione unaria o Proprietà



- Funzioni – relazioni con un solo valore per un dato valore dell’argomento (o argomenti) (padre di, secondo tempo di, inizio di)

padre di (y, x)
y è padre di x   y=padre(x) x--argomento
padre di (Giovanni, Giuseppe)
padre di (Giovanni, Gabriele)
padre di ~~(Pietro, Gabriele)~~
Per ogni x esiste un solo y



P.S. se ci sono solo figli unici è una funzione biunivoca
Per ogni x esiste un solo y e viceversa

- Fatti: asserzioni che si riferiscono a oggetti, proprietà o relazioni
  - *Il muro è gravemente danneggiato*. Oggetto: muro; proprietà (relazione unaria): gravemente danneggiato
  - *Il sensore di spostamento S1 è più affidabile del sensore di spostamento S2*. Oggetti: sensore di spostamento S1, sensore di spostamento S2; relazione: più affidabile di

Logica del primo ordine

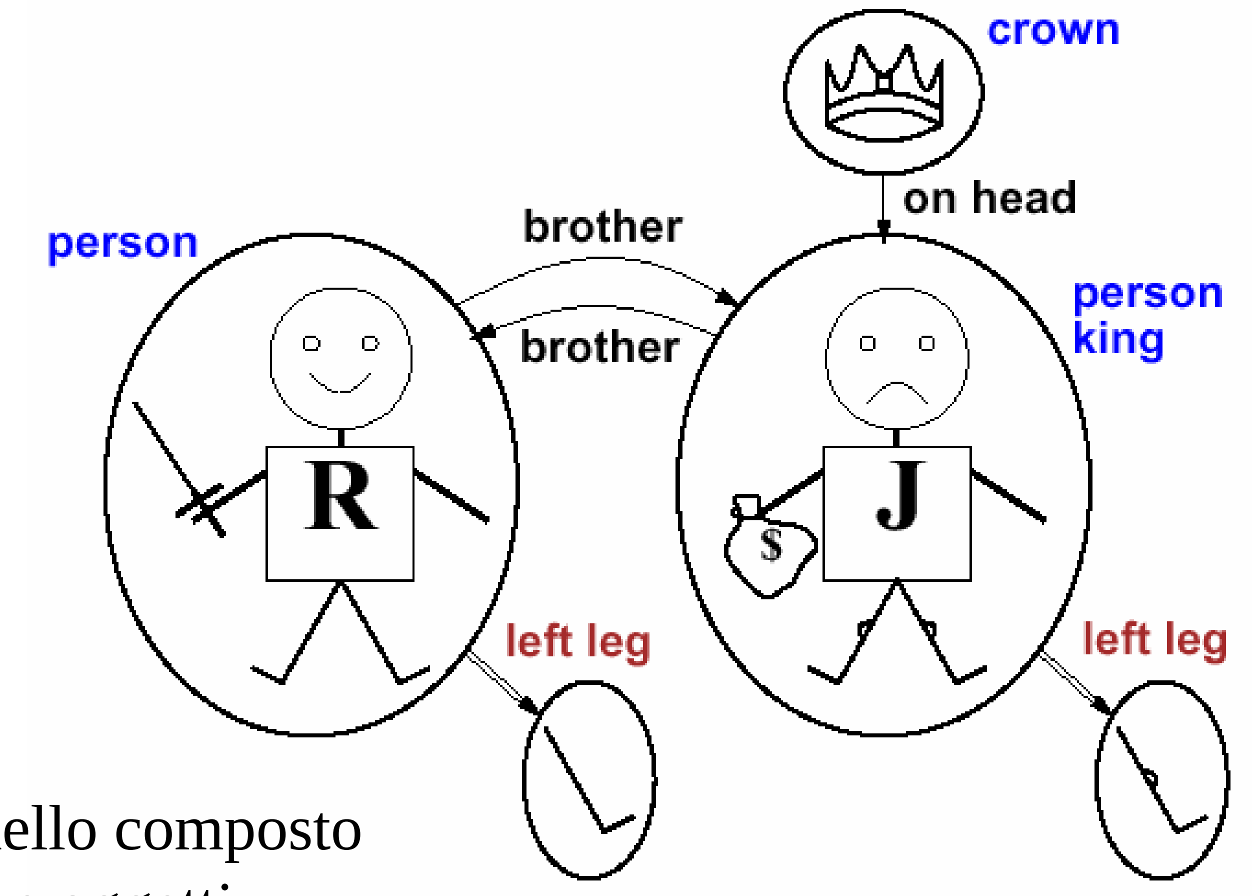
- La logica del primo ordine può esprimere fatti relativi a *tutti* gli oggetti o a *almeno un* oggetto
- Può rappresentare regole generali del tipo:
  - *Un sensore di spostamento è più affidabile di un sensore di pressione.*
  - *Tutte le case dei primi del 900 hanno un muro portante*

- Logica in generale

Language	Ontological Commitment	Epistemological Commitment
Propositional logic	facts	true/false/unknown
First-order logic	facts, objects, relations	true/false/unknown
Temporal logic	facts, objects, relations, times	true/false/unknown
Probability theory	facts	degree of belief $\in [0, 1]$
Fuzzy logic	degree of truth $\in [0, 1]$	known interval value

- Modelli in un linguaggio logico: strutture formali che costituiscono i possibili mondi in considerazione
- Logica Proposizionale: insiemi di valori di verità dei simboli proposizionali
- Logica del primo ordine:
  - Un modello contiene un insieme (*dominio* del modello) di oggetti (*elementi del dominio*)
  - Gli oggetti sono connessi da relazioni (*tuple* di oggetti correlati)

- Esempio: Richard the LionHeart and the evil King John



Un modello composto
da cinque oggetti

- Modello composto da cinque oggetti

  Richard, John,

  Richard's LeftLeg , John's LeftLeg,

  Crown

Oggetti fisici
Immagini del disegno

- Il modello contiene alcune relazioni. Esempi:

  la relazione binaria ***Brother***

  {(Richard, John), (John, Richard)}

  la funzione unaria ***LeftLeg***

  {(Richard, Richard's LeftLeg)}

  le relazioni unarie (proprietà dell'oggetto)

  Person su {Richard, John} ***King*** su {John} ***Crown*** su {Crown}

Nota: questi oggetti hanno un nome

Nota: questi oggetti (gambe e corona) non hanno un nome

- Componenti sintattici di FOL
  - Simboli di costanti (oggetti)
  - Simboli di predicati (relazioni), ognuno dei quali ha associato un intero positivo n detto arità (numero degli argomenti). Un predicato di arità n è detto n-ario
  - Simboli di funzioni – relazioni con un solo valore per un dato valore degli argomenti (con arità-numero degli argomenti)

Modelli e interpretazioni

- Semantica: associare frasi a modelli al fine di determinare la verità delle frasi
- In PL la semantica è determinata dal modello
- In FOL per definire una semantica bisogna definire anche una

Interpretazione

I *simboli di costanti*, *predicati e funzioni*

a quali oggetti, relazioni e funzioni si riferiscono?

- Una possibile interpretazione

Vocabolario dei Simboli

Costanti

Richard,

John

Predicati

Brother

OnHead

Person

King

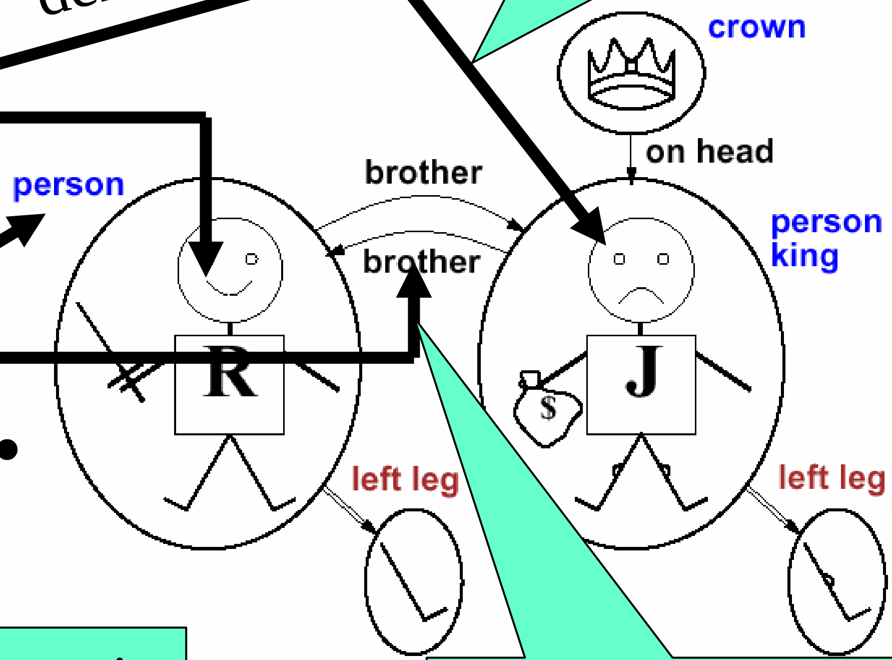
Crown

Funzioni

LeftLeg

denota

Oggetto individuale



• • • •

Insieme di oggetti che sono persone

Insieme di tuple di oggetti {(Richard, John), (John, Richard)}

- Un'altra possibile interpretazione

Vocabolario dei Simboli

Costanti

Richard,

John

Predicati

Brother

OnHead

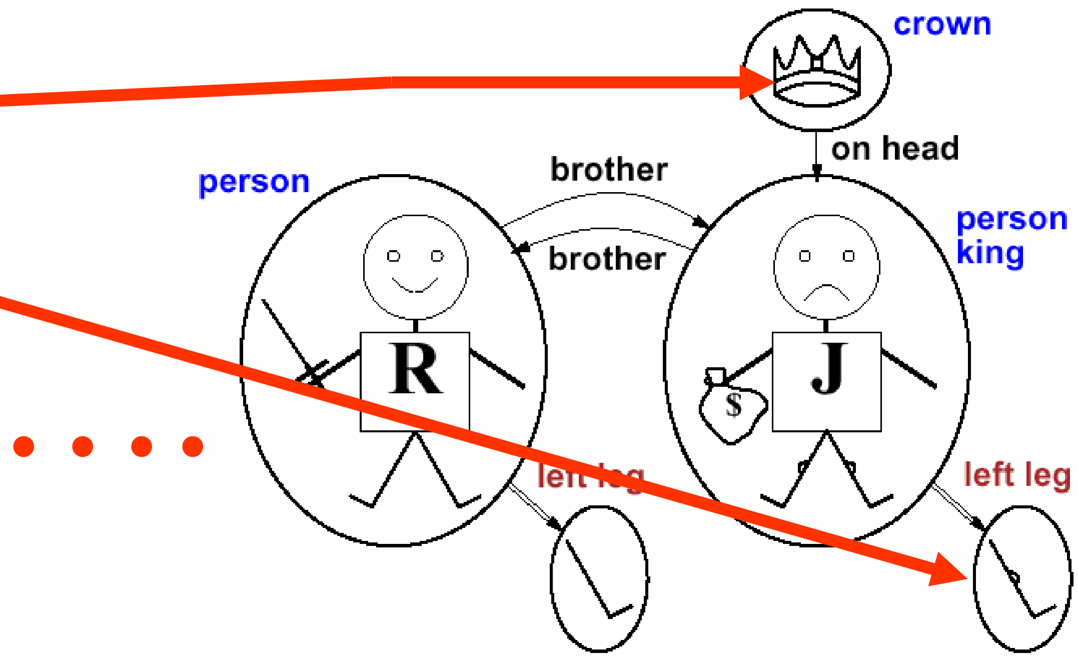
Person

King

Crown

Funzioni

LeftLeg



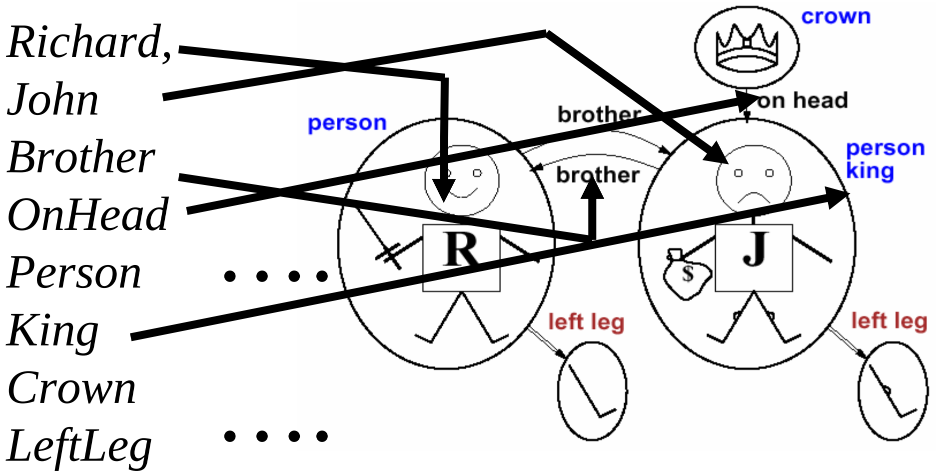
5^2 possibili interpretazioni (5 oggetti) solo per i due simboli *Richard, John*

Modelli e interpretazioni

Brother (Richard, John) ∧ King(John)	*OnHead (Richard, John)*

La frase è vera nel modello con l’interpretazione A

La frase è falsa nel modello con l’interpretazione A



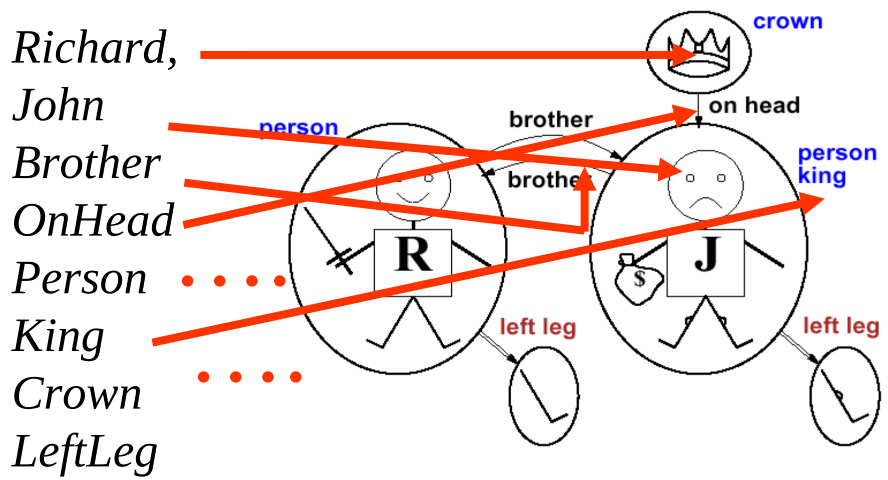
note:

non si richiede che l’interpretazione assegni un nome a tutti gli oggetti (es. la corona non ha nome)

Un oggetto potrebbe anche avere più nomi

Modelli e interpretazioni

Brother (Richard, John) ∧ King(John)	*OnHead (Richard, John)*
La frase è falsa nel modello con l'interpretazione B	La frase è vera nel modello con l'interpretazione B



Modelli e interpretazioni

- La verità di una frase è determinata dal modello e dall'interpretazione relativa ai simboli della frase
- Implicazione logica, validità,… sono definite nei termini di *tutti i possibili modelli* e *tutte le possibili interpretazioni*

Modelli e interpretazioni

- Numerosità dei modelli in FOL
- Si possono enumerare i modelli per
  - Numerosità degli elementi del dominio (possibile numero infinito degli elementi)
  - Ogni possibile associazione di costanti a oggetti
  - Ogni possibile associazione di predicati unari (attributi) a oggetti
  - …………

- Numerosità dei modelli in FOL
  - Il numero degli oggetti del dominio può essere infinito
  - Anche se il numero di oggetti è finito il numero può essere molto grande

    Es.: con i simboli ed i 5 oggetti dell'esempio il numero delle combinazioni è circa 10^{25}

- Non è possibile utilizzare l'algoritmo di inferenza per enumerazione (model checking)

- Sintassi
- Simboli di:
  - Costanti (oggetti)
  - Costanti proposizionali *True False* ($\top$ $\bot$)
  - Predicati (relazioni), ognuno dei quali ha associato un intero positivo n detto arità. Un predicato di arità n è detto n-ario
  - Funzioni, ognuna delle quali ha associato un intero positivo detto arità. Una funzione di arità n è detta n-aria

Sintassi e semantica

– Variabili x1 , x2,…..
– Connettivi proposizionali: $\neg$ $\wedge \vee$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$
– Il simbolo di uguaglianza =
– I simboli separatori ‘(’, ‘)’ e ‘,’
– Il simbolo di quantificazione universale $\forall$
– Il simbolo di quantificazione esistenziale $\exists$

Sintassi e semantica

$$
\begin{array}{rcl}
\mathit{Sentence} & \rightarrow & \mathit{AtomicSentence} \\
 & | & (\ \mathit{Sentence}\ \mathit{Connective}\ \mathit{Sentence}\ ) \\
 & | & \mathit{Quantifier}\ \mathit{Variable}, \ldots\ \mathit{Sentence} \\
 & | & \neg\ \mathit{Sentence} \\
 & & \\
\mathit{AtomicSentence} & \rightarrow & \mathit{Predicate}(\mathit{Term}, \ldots)\ |\ \mathit{Term} = \mathit{Term} \\
 & & \\
\mathit{Term} & \rightarrow & \mathit{Function}(\mathit{Term}, \ldots) \\
 & | & \mathit{Constant} \\
 & | & \mathit{Variable} \\
 & & \\
\mathit{Connective} & \rightarrow & \Rightarrow |\ \wedge\ |\ \vee\ |\ \Leftrightarrow \\
\mathit{Quantifier} & \rightarrow & \forall\ |\ \exists \\
\mathit{Constant} & \rightarrow & A\ |\ X_1\ |\ \mathit{John}\ |\ \cdots \\
\mathit{Variable} & \rightarrow & a\ |\ x\ |\ s\ |\ \cdots \\
\mathit{Predicate} & \rightarrow & \mathit{Before}\ |\ \mathit{HasColor}\ |\ \mathit{Raining}\ |\ \cdots \\
\mathit{Function} & \rightarrow & \mathit{Mother}\ |\ \mathit{LeftLeg}\ |\ \cdots
\end{array}
$$

Sintassi della logica del primo ordine (BNF)

Sintassi e semantica

- Parentesi e precedenza degli operatori come per la logica proposizionale
  - Utilizzo stretto delle parentesi (ogni frase costruita con operatori binari deve essere tra parentesi)
  - Oppure precedenza degli operatori

    $\neg$, $\wedge$,$\vee$,$\Rightarrow$,$\Leftrightarrow$
  - $\forall$, $\exists$ vedi di seguito…..

- Varianti nella notazione

	Russell Norvig	Altri
Negazione (not)	$\neg P$	$\sim P \quad \overline{P}$
Congiunzione (and)	$P \land Q$	$P \& Q \quad P \cdot Q \quad PQ \quad P, Q$
Disgiunzione (or)	$P \lor Q$	$P \mid Q \quad P; Q \quad P + Q$
Implicazione (se)	$P \Rightarrow Q$	$P \rightarrow Q \quad P \supset Q$
Equivalenza (sse)	$P \Leftrightarrow Q$	$P \equiv Q \quad P \leftrightarrow Q$
Universale (perOgni)	$\forall x \; P(x)$	$(\forall x) P(x) \quad \bigwedge x \; P(x) \quad P(x)$
Esistenziale (esiste)	$\exists x \; P(x)$	$(\exists x) P(x) \quad \bigvee x \; P(x) \quad P(Sk_i)$
Relazione	$R(x, y)$	$(R \; x \; y) \quad Rxy \quad xRy$

- Termini

  Espressione logica che si riferisce ad un oggetto

  – Simbolo costante, variabile

Richard

  – Simbolo funzione $function(term_1, \ldots, term_n)$

LeftLeg(Richard)

Nota: non è una funzione nel senso di un linguaggio procedurale (restituisce un valore) ma “un nome complicato”

- Significato dei termini

  $function\ (term_1,\ldots term_n)$

  – *function* si riferisce ad una funzione nel modello

  – gli argomenti $term_1,\ldots term_n$ si riferiscono a oggetti nel modello

  – Il termine nel complesso $function\ (term_1,\ldots term_n)$ si riferisce all'oggetto che corrisponde al valore della funzione applicata agli argomenti

  LeftLeg(Richard)

  L'interpretazione fissa il referente di ogni termine

- Predicati

Relazioni tra oggetti

- Frasi atomiche $\quad predicate(term_1,\ldots, term_n)$ or $term_1 = term_n$

Frasi costituite da un predicato seguito da una lista di termini tra parentesi (anche termini complessi)

Brother(Richard, John)

Married(Father(Richard), Mother(John))

>(Length(LeftLeg(Richard)), Length(LeftLeg(John))

Convenzione: *P(x,y)* è interpretato come *x* è *P* di *y*

- Significato delle frasi atomiche
- Una frase atomica *predicate* $(term_1,\ldots term_n)$

  è vera in un modello, sotto una data interpretazione

  se e solo se gli oggetti riferiti da $term_1,\ldots term_n$

  sono nella relazione riferita da *predicate*

- Frasi complesse

  Costruite a partire da frasi atomiche attraverso l'uso di connettivi

$$\neg\, Brother\ (LeftLeg(Richard), John)$$

$$Brother\ (Richard, John) \land Brother\ (John, Richard)$$

$$King(Richard) \lor King(John)$$

$$\neg\, King(Richard) \Rightarrow King(John)$$

- Significato delle frasi complesse: tavole della verità dei connettivi come per la logica proposizionale

Sintassi e semantica

- Quantificatore universale

$$\forall \textit{(variables) (sentence)}$$

Tutti i re sono persone

$$\forall x\ King(x) \Rightarrow Person(x)$$

- Significato di $\forall x\ P$: P è vero per ogni oggetto x

- Significato più preciso di $\forall x\, P$

  $\forall x\, P$ è vero in un dato modello, sotto una data interpretazione *(interpretazione originale)*

  se e solo se P è vero in tutte le possibili *interpretazioni estese* dove ogni interpretazione estesa specifica l'elemento del modello (dominio) a cui x si riferisce

  (P vero con x che è ogni possibile oggetto del modello)

$$\forall x \; King(x) \Rightarrow Person(x) \quad (1)$$

Deve essere vero in tutte le interpretazioni estese

$x \rightarrow$ *Richard*

$x \rightarrow$ *John*

$x \rightarrow$ *Richard's LeftLeg*

$x \rightarrow$ *John's LeftLeg*

$x \rightarrow$ *the crown*

La frase è vera in tutte le interpretazioni
Nel senso della implicazione materiale
(con premessa falsa conclusione vera)

P	Q	$P \Rightarrow Q$
false	*false*	*true*
false	*true*	*true*
true	*false*	*false*
true	*true*	*true*

La frase *(1)* equivale ad asserire le seguenti frasi:

King(John) $\Rightarrow$ *Person(John)*
King(Richard) $\Rightarrow$ *Person(Richard)*
King(Richard's LeftLeg) $\Rightarrow$ *Person(Richard's LeftLeg)*
King(John's LeftLeg) $\Rightarrow$ *Person(John's LeftLeg)*
King(the crown) $\Rightarrow$ *Person(the crown)*

Sintassi e semantica

Asseriamo la verità della conclusione solo per per gli oggetti per cui è vera la premessa (*John*)

Per tutti gli altri (es *Richard*) la premessa è falsa e non diciamo nulla sulla conclusione

(l'implicazione è vera sia per conclusione vera che falsa)

P	Q	$P \Rightarrow Q$
false	*false*	*true*
false	*true*	*true*
true	*false*	*false*
true	*true*	*true*

$King(John) \Rightarrow Person(John)$

$King(Richard) \Rightarrow Person(Richard)$

$King(Richard\text{'s } LeftLeg) \Rightarrow Person(Richard\text{'s } LeftLeg)$

$King(John\text{'s } LeftLeg) \Rightarrow Person(John\text{'s } LeftLeg)$

$King(the\ crown) \Rightarrow Person(the\ crown)$

- Errore comune: usare la congiunzione al posto dell'implicazione

- Al posto di $\boxed{\forall x\ King(x) \Rightarrow Person(x)}$

(Significa *"ogni re è una persona")*

- Si scrive $\boxed{\forall x\ King(x) \wedge Person(x)}$

(Significa *"ognuno è un re e ognuno è una persona")*

- Quantificatore esistenziale

$$\exists (variables)\ (sentence)$$

Re Giovanni ha la corona sulla sua testa

$$\exists\, x\ Crown(x) \wedge OnHead(x, John)$$

- Significato di $\exists\, x\, P$: P è vero per almeno un oggetto x

- Significato più preciso di $\exists x P$
- $\exists x P$ è vero in un dato modello, sotto una data interpretazione *(interpretazione originale)*

  se e solo se *P* è vero in almeno una delle possibili *interpretazioni estese* dove ogni interpretazione estesa specifica l'elemento del modello (dominio) a cui *x* si riferisce

  (*P* vero con *x* che è almeno un possibile oggetto del modello)

$$\exists\, x\; Crown(x) \land OnHead(x, John) \quad (1)$$

Deve essere vero in almeno una interpretazione estesa

$x \to Richard$

$x \to John$

$x \to Richard\text{'s } LeftLeg$

$x \to John\text{'s } LeftLeg$

$x \to the\ crown$

E' vera e quindi la fase è vera

$Crown(Richard) \land OnHead(Richard, John)$

$Crown(John) \land OnHead(John, John)$

$Crown(Richard\text{'s } LeftLeg) \land OnHead(Richard\text{'s } LeftLeg, John)$

$Crown(John\text{'s } LeftLeg) \land OnHead(John\text{'s } LeftLeg, John)$

$Crown(the\ crown) \land OnHead(the\ crown, John)$

Sintassi e semantica

- Errore comune: usare l'implicazione al posto della congiunzione
- Al posto di $\boxed{\exists\, x\; Crown(x) \wedge OnHead(x, John)}$

  (Significa:
  "Re Giovanni ha la corona sulla sua testa")

- Si scrive $\boxed{\exists\, x\; Crown(x) \Rightarrow OnHead(x, John)}$

  (Significa: *"esiste un x tale che la frase di implicazione è vera*)

  Esempio: $Crown(Richard) \Rightarrow OnHead(Richard, John)$
  Crown(Richard) è falsa quindi l'implicazione è vera

$$\boxed{\exists\, x\ Crown(x) \Rightarrow OnHead(x, John)}$$

Esempio: $Crown(Richard) \Rightarrow OnHead(Richard, John)$
$Crown(Richard)$ è falsa quindi l'implicazione è vera

Un'implicazione quantificata esistenzialmente è vera
in qualunque modello che contiene un oggetto per il
quale la premessa dell'implicazione è falsa: frase poco utile

- Utilizzo multiplo dei quantificatori

$\forall x \ \forall y$ is the same as $\forall y \ \forall x$

$\exists x \ \exists y$ is the same as $\exists y \ \exists x$

$$\boxed{\forall x \ \ \forall y \ \ Brother(x, y) \Rightarrow Sibling(x, y)}$$

Si può scrivere:

$$\boxed{\forall x, y \ \ Brother(x, y) \Rightarrow Sibling(x, y)}$$

sibling consanguineo

- Utilizzo multiplo dei quantificatori

$\exists x \ \forall y$ is **not** the same as $\forall y \ \exists x$

$\exists x \ \forall y \ \ Loves(x, y)$

"There is a person who loves everyone in the world"

$\forall y \ \exists x \ \ Loves(x, y)$

"Everyone in the world is loved by at least one person"

Ordine di quantificazione: $\exists x \left(\forall y \ \ Loves(x, y)\right)$

$\forall y \left(\exists x \ \ Loves(x, y)\right)$

- Connessione tra $\forall$ e $\exists$
- I due quantificatori sono connessi attraverso la negazione

$$\forall x \quad \neg \mathit{Likes}(x, \mathit{Broccoli})$$

È equivalente a

$$\neg \exists x \ \mathit{Likes}(x, \mathit{Broccoli})$$

$$\forall x \quad \mathit{Likes}(x, \mathit{IceCream})$$

È equivalente a

$$\neg \exists x \quad \neg \mathit{Likes}(x, \mathit{IceCream})$$

- Connessione tra ∀ e ∃
- I due quantificatori rispettano le regole de DeMorgan

$$\begin{aligned}
\forall x\ \neg P &\equiv \neg\exists x\ P \\
\neg\forall x\ P &\equiv \exists x\ \neg P \\
\forall x\ P &\equiv \neg\exists x\ \neg P \\
\exists x\ P &\equiv \neg\forall x\ \neg P
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\neg P \wedge \neg Q &\equiv \neg(P \vee Q) \\
\neg(P \wedge Q) &\equiv \neg P \vee \neg Q \\
P \wedge Q &\equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
P \vee Q &\equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)
\end{aligned}$$

- Eguaglianza
- Due modi di costruire frasi atomiche: con predicati e termini e con il simbolo di eguaglianza $predicate(term_1, \ldots, term_n)$ or $term_1 = term_n$

$term_1 = term_n$

Father (Henry, John)

Henry = Father(John)

Significato: i due termini si riferiscono allo stesso oggetto

Una interpretazione fissa i referenti di ogni termine

Verificare la verità della frase vuol dire verificare che i due termini sono lo stesso oggetto

- esempio

$\exists\, x,y\ \ Brother\,(x, Richard) \land Brother\,(y, Richard) \land \neg\,(\mathrm{x{=}y})$

Significato: *Richard ha almeno due fratelli*

$\exists\, x,y\ \ Brother\,(x, Richard) \land Brother\,(y, Richard)$

Non ha il significato: *Richard ha almeno due fratelli*
Se x e y sono assegnati allo stesso oggetto (una delle possibili *interpretazioni estese)*, la frase è vera nel caso in cui Richard ha un solo fratello
$\neg$ (x=y) elimina questi modelli

Nota: al posto di $\neg$ (x=y) si può utilizzare $x \neq y$